

# 校長通信 (教職員版) 第58号 2018. 12. 3

## 生徒が思考する授業、 どこまでできていますか？

### 【1】はじめに

この秋の授業見学もあと数人の先生の見学を行うことで終了します。この段階で先生方の授業を見学させてもらったの感想を述べたいと思います。その切り口は、「生徒が思考する授業がどこまでできていますか？」ということです。先生方は授業方法を改善されていますか？私が赴任してからALや「主体的で対話的で深い学び」の研修などやその必要性について取り組んできましたから、以前から〇〇で仕事をされている先生の授業は、かなりまたは少しずつ変わってきています。工夫が見られます。しかし、その一方で昔ながらの知識一辺倒の授業や「ここで生徒に考えさせないと！」というところで、先に教師が答えを述べてしまう授業、また、ALに取り組んでいるけれども、その本質的理解が一知半解のため、結局うまくいっていない授業などが残念ながら存在するのも事実です。私は数学の教師なので、専門外の教科は一般的な感想しか述べられません、参考にしていただければありがたいです。まずは数学の授業から始めます。

### 【2】数学の授業の目的

数学は何のために勉強するのか？数学の先生や理系の先生以外では、この点に疑問を感じて中学・高校と数学から段々と遠ざかっていった先生もおられるのではないのでしょうか？生徒も同じで、数学の授業で一番大事なのは、「何のために数学を勉強するのか？」ということです。ところが数学が得意な数学の先生は、この問いに対する答えを持っていないことがよくあります。

#### (1) 高校で学習する数学とは？

まずは専門的な話からすると、高校の数学は古代ギリシャやエジプトで発明された数学からニュートンやライプニッツが活躍した時代までの数学です。つまり、17世紀までの数学を勉強します。その後、大学の教養レベルになりますと、数学は一変しカントールが発明した集合論を勉強します。この集合論を基礎に現代数学が成り立ちます。ここから現代の数学が解析学や代数学、確率論、解析幾何学などに分かれていきます。このあたりまで真剣に勉強しなければ数学がどのように社会に役立っているのかということを実の意味で理解できないでしょう。まさに一部の人間の数学の世界です。因みにカントールの集合論とは、大学の最初の授業で学びます。こんなことを学びますが、数学の先生以外の先生で証明できる人はいますか？

#### 無限集合の世界では、

- ①自然数と偶数の個数は同じである。(1, 2, 3, ...と自然数と2, 4, 6, ...という偶数の個数は同じということです)
- ②自然数と整数の個数も同じである。(同じく...-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...という整数も自然数と同じ個数)
- ③分数で表現される有理数も自然数と同じ個数である。
- ④ただ、実数は自然数よりも数が多い。

工学系に進む生徒にとっては、微分積分はもちろんのこと、その前提となる数列、ベクトル、行列などは必須の勉強課題になりますので、なぜ数学を学ばなければならないかは理解できると思います。ただ、物理で習う力学のベクトルや波の波長を示す三角関数とリンクさせるように数学の教師は三角関数やベクトルを教えないといけなないと思います。そうでないと、数学がどこでリンクしてくるか見えてこないからです。大学で生物を学んでいた友達が、僕に突然、「発見したぞ！初めて分

かった。草の分布は、対数関数を使って表すことができるんや！初めて知った！」と叫んで走り去ったことを覚えています。本当かどうか私には分かりませんが・・・。

## (2) 文系生徒にとって数学とは？

最後に文系に進む生徒にとって数学の授業はどういう意味を持つかです。これが非常に重要です。一言で言うと「数学的思考法を学ぶ」ということです。その中核にあるのは、人がどのような感情や意見を持とうが、認めざるを得ない客観的事実に基づく論理性です。この思考方法で積み上げられたのが古代ギリシャの幾何学であるユークリッド幾何学で、中学時代から慣れ親しんだ証明問題です。この論理力は数学の話だけではなく、コミュニケーション力に役立ちます。まるで立場の違う者同士が話し合うとき、感情や自らの意見をぶつけ合っただけでは何も生まれません。両者の間にある客観的な事実を積み上げてこそ合意も得られるわけです。この論理性は、文化も言語も習慣も違う外国人と対話する国際社会では極めて重要です。おなじ意味を表す単語でもそれぞれの意味するところが違えば、誤解が生まれます。言葉の定義から始めなければならないこともあるからです。

この論理性を育てようと思うと、たとえ正解の答えを導き出しても「なぜそう考えたの？」という教師の返しが必要です。多くの授業では、「正解を答える＝理解している」と判断して、その根拠まで問うことはあまり行いません。正解でも不正解でも「なぜそのように考えたのか？」ということが大事なのです。不正解の答えには、必ずといっていいほど論理性の破綻が含まれます。その数学の誤った理解を是正しなければ、いつまでたっても同じ間違いを繰り返すことになるでしょう。

もう一つ、重要な思考方法が数学にあります。それは「場合を尽くす」という考え方です。それを次の問題で紹介しましょう。

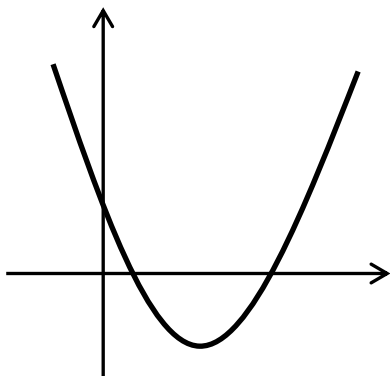
## (3) 「場合を尽くす」思考方法を育てる教科書の問題

数学Ⅰの教科書に次のような例題が掲載されています。二次関数の最後に出てくる問題で、二次関数、二次不等式など一般的なことを理解していないと解けない問題で、入試の基礎の基礎となる問題です。

**2 次関数  $y = x^2 - 2mx - m + 6$  のグラフと  $x$  軸の正の部分が、異なる 2 点で交わる時。定数  $m$  の値の範囲を求めよ。**

### ① 第一の関門—グラフ化

この問題を解かせる時、まず私なら教科書を伏せさせます。なぜなら、最初に求められることは、日本語で書かれた「**グラフと  $x$  軸の正の部分が、異なる 2 点で交わる**」という部分をグラフに変換できるかが問われるからです。これがきちんとグラフ化できないと何を問われているか、解答への取っ掛かりがつかめないからです。数学が苦手、特にグラフが苦手な生徒は、これができないかもしれません。この段階を確かめずに、直ぐにグラフを黒板に教師が描いてしまうと、その形を生徒は鵜呑みにします。そこで頭が働かないので



そうすると、違うパターンの問題のグラフが描けなくなります。先生方はもうお分かりと思いますが、グラフは次のようになります。

### ② 第二の関門—二次関数の一般系から標準形への変換

$$y = x^2 - 2mx - m + 6$$

という二次関数の一般系は「**情報量に乏しい数式だ**」と私は常に授業で言っていました。この式から読み取れる情報は、 $y$  軸との交点「 $-m+6$ 」のみです。だから、「**よりこの二次関数の情報を読み取れるように式を変形する必要があります。それが標準形だ**」

と授業で言っていました。この二次関数を標準形に変形すると

$$y = (x - m)^2 - m^2 - m - 6$$

となります。ここから読み取れる情報は、二次関数の軸が「 $x = m$ 」ということです。この段階での学習では、2 次関数の標準形への変形、そしてその式から情報を読み取ることは当然できていないといけません。

先生方の授業の中で、この「情報を読み取る」ということを意識的にさせていますか？式の意味するところの情報を読み取るという作業は、数学ができる先生からすると、「当たり前のように式が語ってくれている情報」ですが、数学が苦手な生徒にとっては、式は「何も語ってくれない」のです。だから、二次関数の「**情報を読み取る**」と言う意識をさせないといけません。そして情報を読み取るという際に求められるのが、「**どんな観点で読み取るのか？**」です。これは、あらゆる情報を読みとるときに求められます。観点抜きに情報を読み取るなんて不可能です。なぜなら、情報は無限大に存在するからです。ある切り口＝観点で見るから情報を読み取ることができます。このことの訓練を「式から情報を読み取る」ことで行っているのです。

今回の二次関数の場合では、

1) グラフの形が上に凸か下に凸か、

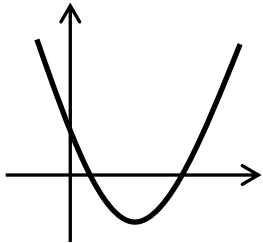
2) 軸はどこにあるか

3) x 軸とどこで(いくつ)交わるか、y 軸とどこで交わるか

ということが、二次関数の式から情報を読み取る観点なのです。さて、この問題の最大の関門は、次の関門です。

③最大の関門—グラフがx 軸と正の部分と2 点で交わる条件を見つける

この「正の部分と2 点で交わる条件」を見つけることが、この問題の最も重要なところなのです。ここが、生徒が思考する場所です。なのに、これを教えてしまう先生がいます。それでは、生徒は何も考えずに「なるほど」と思うか、納得感が余り得られない生徒は、「ふーん」「へー」で終わり、チンプンカンプンの生徒は、「????」のまま終わるでしょう。だから、



ここで、しっかりと時間をとって生徒に考えさせなければならぬのです。因みに■■先生は、この問題の前段として、色々なグラフの形のプリントを用意して、その形になるための条件をグループワークで考えさせていました。とても良いやり方だと思います。

例えば、このグラフの形の場合は3つの条件が必要になります。つまり

1) グラフがx 軸と2 点で交わる⇒判別式  $D > 0$

2) 軸がy 軸の右側にある⇒  $m > 0$

3) y 軸と正の部分で交わる⇒  $-m + 6 > 0$

です。ところが、多くの生徒は、一つの条件を見つけて満足してしまうのです。これは、まさしく生徒のその時点での思考方法を物語っています。つまり、今回のケースで言うと、1) の

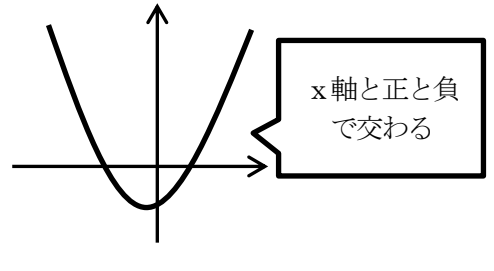
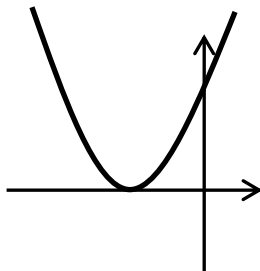
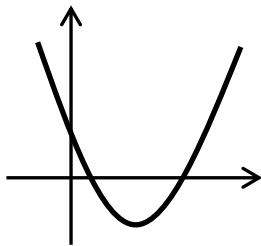
**グラフがx 軸と2 点で交わる⇒判別式  $D > 0$**

だけを見つけて満足してしまうのです。なぜかという、この問題の前の段階で、2 次方程式と判別式の関係で

**2 次方程式が二つの実数解をもつ⇔判別式  $D > 0$  ⇔ 2 次関数がx 軸と2 点で交わる**

ということをやとやうほど教え込まれるからです。そこで、形を決定させる条件を見つけるために、「場合を尽くして考える」という思考方法を見につけさせなければなりません。この思考方法を身につけさせるための指導方法を竹友先生の授業を発展させる形で紹介しましょう。

グラフの形は、3つ程度(すべて下に凸は同じ)



これを二つずつのグループに1 問ずつ二次関数の決定条件を考えさせます。そして、生徒にディベートをさせます。例えば、左端のグラフに取り組みグループがAとBのグループならば、Aグループが発表した条件に対して、Bグループに反例を出させます。そして、Bグループの条件に対してAグループも反例を考えさせるのです。そうすることによって、自然と「場合を尽くす」という思考が身につきます。両方のグループが、同じ答えならば、他のグループから反例を出させることもいいでしょう。どこの班からも出なければ、教師が反例を出すことも必要です。

もうお分かりと思いますが、左と中央は、条件の抜け落ちを考える「プラスの条件探し」になります。しかし、右のグラフは、余計な条件をふるい落とす「マイナスの条件探し」になるのです。つまり、左のグラフを決定させるのは、

**y 軸との交点  $< 0$**

というだけで、グラフの形が決定します。これも二つのグループの出した条件をふるい落とすディベートをやれば、おもしろいと思います。

さて、この二次関数の問題を使った「場合を尽くす」という思考方法ですが、数学の先生も含め、ほとんどの先生は、日頃からこのような思考をしていませんか?つまり

**「何かを始めるときに、そのプロジェクトを成功させるために必要な条件は何か？」**

ということです。このような思考方法を見につけておかないと、安易に物事を始めてしまい、後で痛い目に合うということになります。ただし、実際の社会では、「走りながら考える」といことを行いますが、走りながらも常にプロジェクトのトップは、この視点を常にもってプロジェクトの進行を見守らなければなりません。

この「場合を尽くす」という思考方法を、2 次関数を例にとって紹介しましたが、この思考方法は、数学の先生ならお分

かりと思いますが、あらゆるとっていいほどの数学の問題に必要なことなのです。この「場合を尽くす」という思考を言い換えると、

## 「様々な視点から見る力」

と言い換えても良いかもしれません。

この他にも数学的思考力として求められるのが、

### ●イメージする力（具現化する力）

とかく、数学の問題は、抽象的な問題が多く、イメージができにくい。それを如何に具現化するか、それも条件を崩さずに。つまり特殊条件をつけずに、また具現化したときの特殊条件が何かを把握できるか。

### ●抽象化する力（モデル化する力）

様々な事象から本質だけを抜き取り、いらぬ情報を捨て、抽象化する力。これは、今後日常的な問題やグラフやデータの読み取り問題が出題される中で、この力は益々必要です。

### ●分解する力

この力が試されるのは、こんな問題です。

#### 全ての整数 $n$ について、 $n^2$ を3で割った余りは2にならないことを証明せよ

これは、整数 $n$ を3の倍数、3で割って1余る数、3で割って2余る数に分解して証明していきます。いきなり、この問題を証明するのは、私にはできません。まずは、「分解する」のです。

### ●関係付ける力

これは、関数で求められることが多い。生徒の中で関数を苦手とする者が多いと思いますが、それは二方向（ $x$ 軸方向と $y$ 軸方向）の変化ということが苦手だからです。ですが、数学では二つのものを関係付けるという力が養われる。最初の集合論の問題に戻りましょう。なぜ、無限集合では、自然数と偶数が同じ数なのか。日常的な感覚では、偶数は自然数の半分の数だと思います。しかし、この日常の感覚とは、有限集合で考えているからです。無限集合の場合、次のように自然数と偶数に1対1対応を関係付けます。すなわち、

$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 8 \dots$

つまり  $y = 2x$  ( $x$ は自然数、 $y$ は偶数) と関係づけると、無限集合の場合は、どこまでも自然数と偶数に1対1対応ができるのです。だから、「自然数と偶数は同じ数」と証明できるのです。

### ●総合し説明する力

この力が最も問われるのは、答案を書くときです。私が常に言っていたのは、

**「答案は、相手(先生)に自分の考え(問題の解答)を数学の言葉を使って伝えるものだ」**

ということです。ですから、「何からどのような順番でどのように伝えれば(書けば)、相手に理解してもらえるか」という、まさに数学という言語を使ったコミュニケーションです。それが答案です。しかしながら、このことがとても苦手な生徒が多い。その理由は簡単です。小学校の算数、中学校の数学は証明問題以外ほぼ答えだけの記述でよかったからです。意外かも知れませんが、数学が得意な生徒に多いです。ですから、授業見学で期間巡視をするとき、答案をスラスラ書いているようで、書いていない生徒(本人は答案を書いていると思っている)に対して、私は、「それはメモ書きだから、きちんと相手に伝わるように書いてごらん」と言います。そうすると突然生徒の手が止まり、フリーズするのです。どう書いていいかわ

からないのです。つまり、きちんと授業の中で、教えてもらっていないのです。私は、常にどう答案を書くかを教えてきました。私の黒板はこんな感じでした。ところが、多くの先生は、右の考え方の板書と答案の板書が混ざっている人が多い。これでは、数学言語を使ったコミュニケーションが混乱します。さて、今回は、数学の話題だけで終わってしまいました。次回は、他教科の授業を見学した感想を述べてみたいと思います。

